

# PERI KUALITATIF PERSAMAAN DIFFERENSIAL TERPILAH UNTUK GELOMBANG KEJUT SUNAMI

N. Widiasmadi<sup>\*)</sup>

## ABSTRACT

*Gadunov provides insight to the general solution of Riemann problem by considering the shock as a **local phenomena**, and treated accordingly as **local problem**. Two dimensional exact analytical Riemann problems may be very difficult to solve. Another approach is to split the two dimensional wave problem into 1D Riemann problem, where the analytical solution is already known. To apply 1D Riemann problem into two dimensional wave problems, one has to discretize to the flow domain, into discrete non-overlapping elements, **control volume** or **cells**. If the elements are the control volumes, then we can employ the **finite volume discretization scheme**. Based on the schemes the hydrodynamic problems can be solved elegantly by transforming the domain into non-overlapping control volume elements and treated each elements as the local Riemann problem. This can be carried out by transforming the global physical coordinates into local one, for every discrete flow elements (the control volume or cell), where the direction of flow axis is aligned with the flux direction. The problem is then solved as hydrodynamic fluxes, **F**, crossing the cells interfaces. The **disadvantage** of this scheme is that the **control volume** —representing gravitation and friction—is eliminated from the equation, and therefore it seems to be not realistic. However, integration of the characteristics with the source included, it can be concluded that the source influence can be ade as small as possible by applying the proper aselection of the time step (Abbot, 1979). In this case, we are treating the problem as solving the Riemann quasi-invariants. The **influence** of neglecting the source term will be reflected in the amount of flux. If this influence is positive, the flux will be less than if the source term is negative, i.e the source term is sink which decreases the momentum content, otherwise it is a source which increases which increases the momentum flux. The influence must be **persistence**, e.g in **dissipative flow regime**, neglecting the source term Riemann equation will result in persistence larger momentum flux compare to the real flow. This error may be less or greater than numerical error. (see Numerical test # 1). Therefore, when applied to the discretized river sistem, the persistence rules will not be always reproduced in the simulation result. This alternating positive and negative effect will be reflected by plotting the numerical test value against the laboratory of field value or by complete numerical value without neglecting the gravitational and friction effects (see simulation test of Osher scheme in Kissimmee river, Florida, USA).*

**Keywords** : local problem, control volume, control volume, control volume, shock wave

## PENDAHULUAN

Persamaan gelombang air dangkal secara utuh mengandung suku sumber **S(U)** yang mewakili tekanan gesekan dinding, redaman energi internal dan gravitasi baik pada kondisi hilir kering atau berair. Meskipun pengaruh ini dapat dibuat sekecil mungkin nisbi terhadap suku-suku advectif (konvektif) dan kecepatan lokal, kehadiran suku redaman ini dapat disimulasikan tanpa kesulitan hanya menambah lama hitungan. Pelibatan suku sumber akan diuraikan pada akhir dari bab ini.

Berbagai model matematika numerik aliran kejut telah berhasil memuat algoritma yang layak – konsisten, mantap dan konvergen – tetapi pemecahannya tidak sempurna. Salah satu cacat numerik adalah munculnya parasit-parasit numerik, yang memuat gangguan kepada penyelesaian numerik. Ini berupa adanya suatu guncangan yang berayun-ayun dengan rentang kecil dan berkerap tinggi ( small amplitude, high frequency oscillation ), sebelum mencapai daerah ketak-mulusan dan sesudah keluar darinya. Penafsiran fisika dari gangguan numerik ini adalah bahwa persamaan aliran pada keping di

<sup>\*)</sup> Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang  
JI Menoreh Tengah X/22 Semarang

dekat ketakmulusan tidak memenuhi hukum entropi hidrodinamika, sehingga kekekalan momentum yang seharusnya, atau kadang lebih kecil (Sugandar ,2004). Jadi untuk algoritma pengepingan, tidak saja keping-keping numerik ini harus memenuhi hukum dasar kekekalan fisika, tetapi juga mutlak harus memenuhi hukum entropi hidrodinamika. Salah satu adalah cara penyelesaian soal Riemann.

Cara ini dengan sendirinya merambatkan informasi dalam arah yang benar, yaitu sepanjang garis karakteristiknya. Secara hidrostik, pemecahan Riemann (*Riemann solver*) berawal pada soal Riemann (*Riemann problem*), yaitu soal kejut dalam aliran mampat aliran tak bertahanan (*compressible inviscid flow*) di mana G.F. Bernhard Riemann mencoba menyelesaikannya pada tahun 1858. Persoalan ini dikenal dalam pustaka aerodinamika sebagai soal tabung kejut (*shock tube problem*) di mana alirannya dimodelkan sebagai persamaan Euler. Bentuk persamaan ini memungkinkan penyelesaian langsung secara analitik eksak dari aliran tak bertahanan dan taktunak.

**METODOLOGI**

Desain suatu runtunan air akibat gelombang tsunami mendasarkan aspek bendung runtuh pada bentuk dinding liugkaran (radial), gerakan secara merata kearah luar, Model ini pada dasarnya menggunakan konsep seperti pada model bendung runtuh diatas, yang mana ketinggian air akibat tekanan kita desain dengan kedalaman awal berbentuk lingkaran, sehingga menggunakan control arah radial dengan pusat pada lingkaran spillway. Dimensi lantai bendung akan kita tinjau empat persegi dengan titik tengah sebagai pusat bocoran, dimensi lantai dan bocoran akan terbagi dalam jaring-jaring (volume tilik) sesuai pembagian sel tiap meter persegi. Karena pertimbangan teknis operasional model yang terdiri dari 50x50 sel atau terdiri dari 2500 volume tilik yang akan memberikan nilai kedalaman air.

Kasus aliran akibat keruntuhan bendung berinding lingkaran dua matra pada suatu lantai bendung ini akan menggunakan konsep uji pertama dan kedua pada pendekatan Riemann, dimana hasil perhitungan model muncul perambatan kejut yang cukup kuat terjadi pada sisi luar dari radial (lingkaran *spill-way*) dan perambatan mulus dengan kecepatan sonik (aliran kritis) pada sisi dalam radial (lingkaran

*spill-way*). Peristiwa ini cukup penting dan menyiratkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = u - a$  akan berubah dari nilai negatif ke nilai positif yang ditandai dengan arah gerak perambatan gelombang dari sisi dalam radial melalui daerah peralihan ( $x=0$ ) menuju ke sisi luar radial, sehingga secara jelas perubahan ini akan membawa nilai eigen  $\lambda_1$  melalui nilai nol pada posisi peralihan dimana  $x=0$  pada posisi kontrol aliran pada dinding bendung yang berbentuk lingkaran.

**ANALISIS**

Penyelesaian ini akan menggunakan pendekatan cara Riemann untuk persamaan aliran dengan permukaan berair pada saluran hilirnya.

Penyelesaian analitik atau cara eksak dengan pendekatan Riemann ini dapat ditulis :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x &= 0 \\ u(x,0) &= \begin{cases} u_L & \text{jika } x < 0 \\ u_R & \text{jika } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} 1.$$

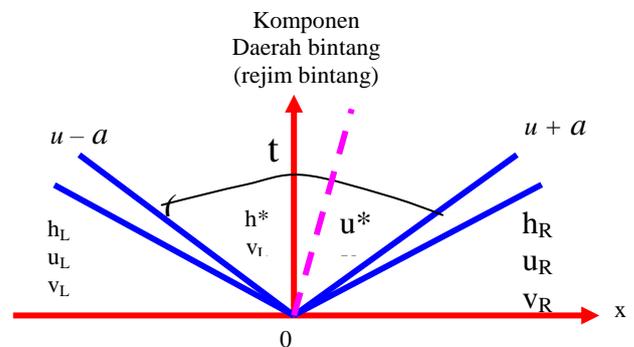
Untuk aliran 2 Matra, yang mana vektor **U** dan **F** (U) adalah :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} h \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} \quad 2.$$

Susunan penyelesaian umum terlihat seperti gambar 1. Tiga gelombang terpisah menjadi 4 konstanta dalam bentuk variabel sederhana.

$$\mathbf{W} = [h, u, v]^T$$

$\mathbf{W}_L$  (data sebelah kiri),  $\mathbf{W}_{AL}$ ,  $\mathbf{W}_{AR}$  dan  $\mathbf{W}_R$  (data sebelah kanan)



Gambar 1 : Persamaan aliran 2 Matra dalam kasus saluran berair.

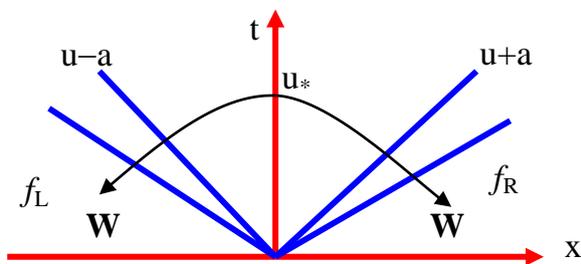
Letak  $W^*_L$  dan  $W^*_R$  pada daerah bintang dan muncul dari interaksi  $W_L$  dan  $W_R$  yang mempunyai kuantitas “anu”. Penyelesaiannya , pertama merangkum properties yang dipakai seperti pada pembahasan sebelumnya.

- Gelombang kiri dan kanan adalah masing-masing sebagai gelombang kejut, penghalusan dan gelombang tengah yang selalu menjadi gelombang peralihan . Proses penyelesaian ditentukan dengan type gelombang yang diberikan sebagai kondisi awal
- Nilai  $h$  &  $u$  berubah untuk suatu potongan gelombang disebelah kanan dan kiri , tetapi  $v$  selalu konstan, sedangkan potongan gelombang di tengah nilai  $v$  berubah secara discontinyu dan kedua nilai  $h$  &  $u$  selalu konstan.

Kami memberi notasi nilai konstanta dari kedalaman air dan kecepatan partikel dalam daerah bintang dengan  $h^*$  dan  $u^*$  bentuk gelombang non linear kiri dan kanan adalah ditentukan oleh kondisi

dan

Tahap awal adalah penurunan aljabar tunggal, persamaan nir-lempang untuk kedalaman air  $h^*$  dalam daerah bintang, ini akan dicapai dengan menghubungkan  $u^*$  pada sisi kiri dan kanan melalui fungsi  $f_L(h, h_L)$  dan  $f_R(h, h_R)$  seperti digambarkan pada 2.



Gambar 2: Hubungan  $u^*$  terhadap  $W_L$  dan  $W_R$  melalui fungsi  $f_L$  dan  $f_R$

Fungsi-fungsi  $f_L(h, h_L)$  dan  $f_R(h, h_R)$  sebagai pengatur hubungan besaran aliran pada masing-masing potongan gelombang sisi kiri dan kanan.

Penyelesaian  $h^*$  dengan pendekatan ini (1) diberikan oleh persamaan aljabar.

$$f(h) \equiv f_L(h, h_L) + f_R(h, h_R) + \Delta u = 0 \quad 5.$$

$$\Delta u \equiv u_R - u_L$$

- $h_* > h_L$  : Gelombang kiri adalah gelombang kejut
- $h_* \leq h_L$  : Gelombang kiri adalah gelombang perlemahan

dimana fungsi  $f_L$  dan  $f_R$  adalah

$$f_L = \begin{cases} 2\sqrt{gh} - \sqrt{gh_L} & \text{jika } h \leq h_L \text{ (perlemahan)} \\ (h-h_L) \sqrt{\frac{1}{2}g \left(\frac{h+h_L}{hh_L}\right)} & \text{jika } h > h_L \text{ (kejut)} \end{cases} \quad 6.$$

- $h_* > h_R$  : Gelombang kanan adalah gelombang kejut
- $h_* \leq h_R$  : Gelombang kanan adalah gelombang perlemahan

Penyelesaian untuk kecepatan partikel  $u^*$  dalam daerah bintang ditulis sebagai

$$f_R = \begin{cases} 2\sqrt{gh} - \sqrt{gh_R} & \text{jika } h \leq h_R \text{ (perlemahan)} \\ (h-h_R) \sqrt{\frac{1}{2}g \left(\frac{h+h_R}{hh_R}\right)} & \text{jika } h > h_R \text{ (kejut)} \end{cases} \quad 7.$$

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[f_R(h_*, h_R) - f_L(h_*, h_L)] \quad 8.$$

Ada empat kasus untuk dipertimbangkan. Penurunan dari (4.5) menurut hubungan  $u^*$  terhadap data  $W_L$  dan  $W_R$  pada masing-masing potongan gelombang kanan dan kiri.

Jika gelombang kiri adalah gelombang penghalusan, maka dapat digunakan konstanta dari pendekatan Riemann pada potongan gelombang kiri dan secara langsung menggunakan persamaan (3.16) dan diberikan

$$u_* = u_L - 2(a_* - a_L)$$

ketika kita mempunyai

$$a = \sqrt{gh}$$

$$\left. \begin{aligned} u_* &= u_L - f_L(h_*, h_L) \\ f_L(h_*, h_L) &= 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_L}) \end{aligned} \right\} \quad 9.$$

Jika gelombang kanan adalah perlemahan sehingga persamaan (3.14) memberikan

$$\left. \begin{aligned} u_* &= u_R + f_R(h_*, h_R) \\ f_R(h_*, h_L) &= 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_R}) \end{aligned} \right\} \quad 10.$$

Jika gelombang kiri adalah gelombang kejut sehingga persamaan (3.31) memberikan.

$$\left. \begin{aligned} u_* &= u_L - f_L(h_*, h_L) \\ f_L(h_*, h_L) &= (h_* - h_L) \sqrt{\frac{1}{2} g \left( \frac{h_* + h_L}{h_* h_L} \right)} \end{aligned} \right\} .11.$$

untuk gelombang sebelah kanan, jika persamaan (3.43) diterapkan maka kita mempunyai

$$\left. \begin{aligned} u_* &= u_R + f_R(h_*, h_R) \\ f_R(h_*, h_R) &= (h_* - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \left( \frac{h_* + h_R}{h_* h_R} \right)} \end{aligned} \right\} .12.$$

eliminasi  $u_*$  dalam semua 4 kasus (4.6), (4.7) memberikan

$$f_L(h_*, h_L) + f_R(h_*, h_R) + u_R - u_L = 0$$

dan  $h_*$  adalah akar dari persamaan (4.5).

Mengasumsikan akar  $h_*$  adalah dapat dilakukan, kemudian  $U_*$  secara langsung didapat dari persamaan (4.9) s/d (4.12), atau dari nilai rata-rata nya adalah

$$u_* = \frac{1}{2} (u_L + u_R) + \frac{1}{2} [f_R(h_*, h_R) - f_L(h_*, h_L)]$$

## PEMBAHASAN

### Kondisi Awal

Kondisi awal model adalah elevasi muka air bendung ber dinding lingkaran, debit aliran atau kecepatan pada kondisi awal yaitu diambil sebesar 1,0 m/det, yang dapat diperoleh dari pengukuran elevasi muka air dalam spill-way yang berbentuk lingkaran dengan jari-jari 10 meter, dari hasil perhitungan hidrolika akan memberikan ketinggian tertentu pada kedalaman hulu spill-way akibat keruntuhan yang tertekan keluar secara radial dalam hal ini sebagai kedalaman awal saat keruntuhan 1,0 meter.

Sedangkan posisi ketak-mulusan sentuh (contact discontinuity) pada  $x = 0$  yaitu pada posisi pintu bendung diletakkan melingkar dalam hal ini ditempatkan pada dinding seputar spill-way sebagai control awal elevasi muka air keruntuhan disebelah sisi dalam radial diskontinyu.

### Kondisi Batas

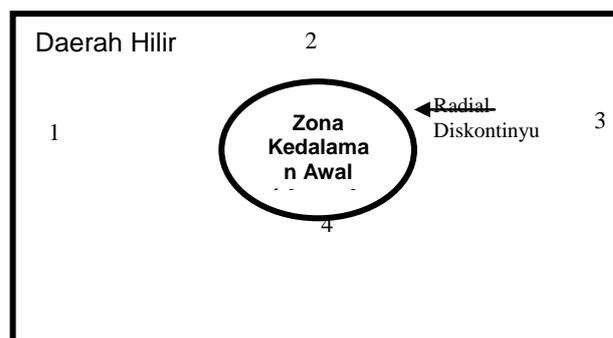
Secara umum daerah model akan dibagi menjadi dua yaitu daerah hulu (bagian dalam dinding keruntuhan) dan daerah hilir (bagian luar dinding keruntuhan), masing-masing daerah dipisahkan oleh batas diskontinyu.

### Kondisi Batas Hulu

Pada Kondisi batas hulu, tergantung pada letak dan posisi busur lingkaran keruntuhan. Untuk praktisnya dalam model ini akan ditinjau keruntuhan utuh tunggal (satu lingkaran penuh) dengan bentuk melingkar.

### Kondisi Batas Hilir

Kondisi batas hilir diberikan pada dinding lantai bendung yaitu dinding 1 s/d 4 juga diberikan oleh elevasi genangan pada tampungan hilirnya yang secara alamiah didapatkan sebagai muka aliran dasar (*base flow*) yang mengalir secara konstan sepanjang tahun, diperoleh dari pengamatan muka air langsung dilapangan atau dengan perhitungan hidrograp aliran dasar sebagai base flow yang ada di suatu Daerah Aliran Sungai (DAS) yaitu ditetapkan 0,1 meter pada kondisi berair dan 0,00001 pada kondisi kering tidak mutlak.



Gambar 3 Diagram Lantai dengan Lingkaran Keruntuhan

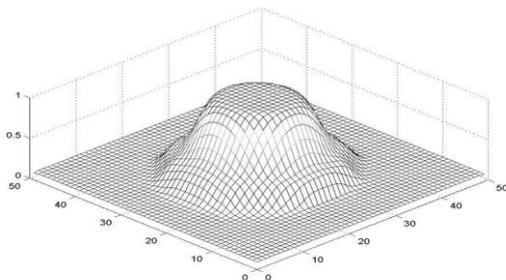
### Faktor Sumber

Dalam model numerik dimasukkan beberapa aspek kondisi morfologi kolam atau sungai yang terbungung yang dimasukkan sebagai faktor sumber, dimana meliputi faktor kekasaran dasar lantai bendung dengan angka manning ( $C_n$ ) adalah 0,003 dan dasar lantai diambil datar.

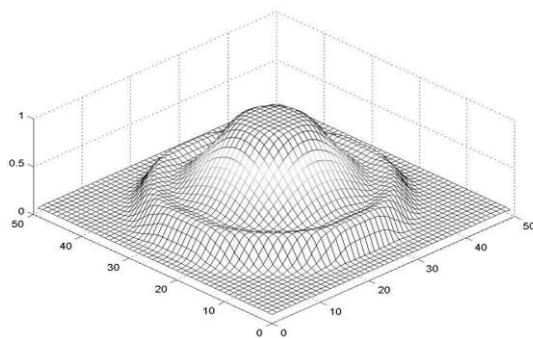
Pada model keruntuhan dengan kondisi hilir berair akan ditinjau dan diamati pada waktu 1 dan 2 detik setelah dinding spill-way runtuh secara mendadak. Pada kondisi pengamatan awal pada 1 detik setelah dinding lingkaran spill-way runtuh maka akan terjadi aliran mulus pada sisi hulu atau bagian dalam lingkaran keruntuhan. Pada waktu pengamatan ini muka kejut secara jelas sudah terlihat pada sekitar 15.0 meter dari pusat keruntuhan dengan perambatan terlihat simetri kearah sisi hilir atau bagian luar lingkaran keruntuhan. Kedalaman konstan pada

hilir muka kejut merupakan tinggi genangan sebagai base flow yaitu 0,1 meter (lihat gambar 4).

Pada kondisi pengamatan kedua yaitu pada waktu 2 detik setelah setelah dinding lingkaran *spill-way* runtuh terbuka maka aliran mulus yang terbentuk lebih fluktuatif dari kondisi pertama dengan terbentuknya medan loncatan air (lihat gambar 6.11b). Penyebaran loncatan air dalam dua matra terlihat jelas pola rayapannya dalam hal ini terlihat berolak simeteri. Rayapan muka kejut akan terlihat jelas setelah melalui loncatan air dan muka kejut bergerak secara radial keluar seiring dengan bertambahnya waktu . Pada waktu tinjauan ini terlihat muka kejut berjarak 18 meter dari pusat keruntuhan.



Gambar 4 Model Keruntuhan Melingkar Pada Lantai Berair waktu 1 detik



Gambar 5 Model Keruntuhan Melingkar Pada Lantai Berair waktu 2 detik

## KESIMPULAN

Dari hasil uji numerik dan uji hipotetik untuk gelombang sunami yang mendasarkan kelombang kejut bendung runtuh radial didapat suatu grafik dari representasi hitungan yang muncul berdasarkan analisis model baik pada hasil model satu matra ataupun dari hasil model dua matra. Beberapa kesimpulan hasil uji

numerik dan hipotetik diatas maka dapat ditulis sebagai berikut :

1. Pada model bendung runtuh hilir berair radial sebagai dasar analisis keruntuhan gelombang Tsunami, maka akan muncul perambatan kejut cukup kuat yang akan terjadi pada sisi kanan dan perambatan mulus dengan kecepatan sonik (aliran kritis) pada sisi kiri . Peristiwa ini cukup penting dan menyiratkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = u - a$  akan berubah dari nilai negatif ke nilai positif yang ditandai dengan arah gerak perambatan gelombang dari sisi kiri melalui daerah peralihan ( $x=0$ ) menuju ke sisi kanan, sehingga secara jelas perubahan ini akan membawa nilai eigen  $\lambda_1$  melalui nilai nol pada posisi pintu bendung atau pada posisi peralihan dimana  $x = 0$  atau  $\lambda_1 = u - a = 0$  yang dapat ditulis  $u = a$ .
2. Dari hasil uji numerik terlihat bahwa pengaruh gesekan yang ditimbulkan oleh angka meaning dan grafitasi tidak seluruhnya sirna bersama dengan dihilangkannya suku sumber. Hal ini dapat dimengerti bahwa sebagian dari pengaruh ini (cukup besar) telah dimasukkan dalam suku **konvektif** dan **kelajuan gelombang** yang dapat dikatakan sebagai faktor tersembunyi. Dalam ungkapan laju gelombang tersembunyi pengaruh gravitasi  $g$  dan kedalaman aliran  $h$  dalam ungkapan  $c = \sqrt{gh}$ , di mana  $h$  sendiri mencerminkan pengaruh gesekan dinding dan gesekan antar butir fluida.
3. Meskipun demikian, asal saja keping waktu cukup kecil, maka pengaruh gesekan dan gravitasi dapat dibuat sekecil mungkin, sehingga suku sumber dapat kita abaikan. Dengan pengabaian suku sumber ini, maka kita peroleh hampiran Riemann takubah (*Riemann invariants approximation*), di mana arus ke luar dari sell dapat ditentukan dengan hampiran ketakubahan Riemann (*Riemann invariant*).
4. Hampiran ini mengandung galat, tetapi galat ini akan bergantian berkisar di sekitar titik solusi P lokal, sehingga secara global penyelesaian hampiran Riemann ini tidak akan melenceng jauh dari titik solusi P yang diperoleh dengan memperhitungkan pengaruh gesekan dan gravitasi.